Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Elektroenergiesysteme
und Hochspannungstechnik (IEH)
Leiter: Prof. Dr.-Ing. T. Leibfried

Hochspannungstechnik I

Übungsbegleitender Umdruck

Einfache elektrische Felder und Potentialfunktion

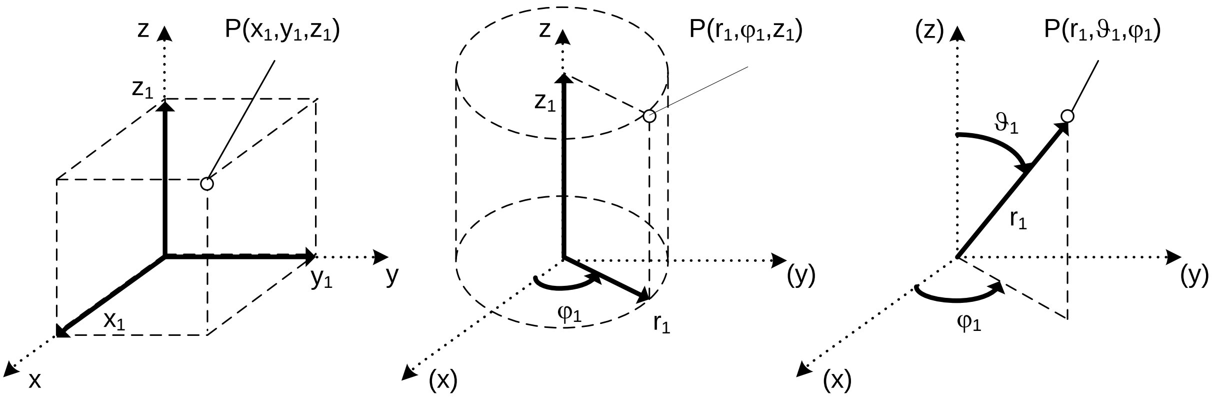
Maxwellgleichungen		
Bezeichnung	**Integralform**	**Differentialform**
Induktionsgesetz	$\oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = -\iint_A \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{A}$	$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$
Durchflutungsgesetz	$\oint_S \vec{H}\, d\vec{s} = \iint_A \left(\vec{j}_L + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{A}$	$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}_L + \frac{d\vec{D}}{dt}$
Satz vom Hüllenfluss	$\oiint_A \vec{D}\, d\vec{A} = \iiint_V \rho\, dV$	$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$
Satz von der Quellenfreiheit mag. Felder	$\oiint_A \vec{B}\, d\vec{A} = 0$	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

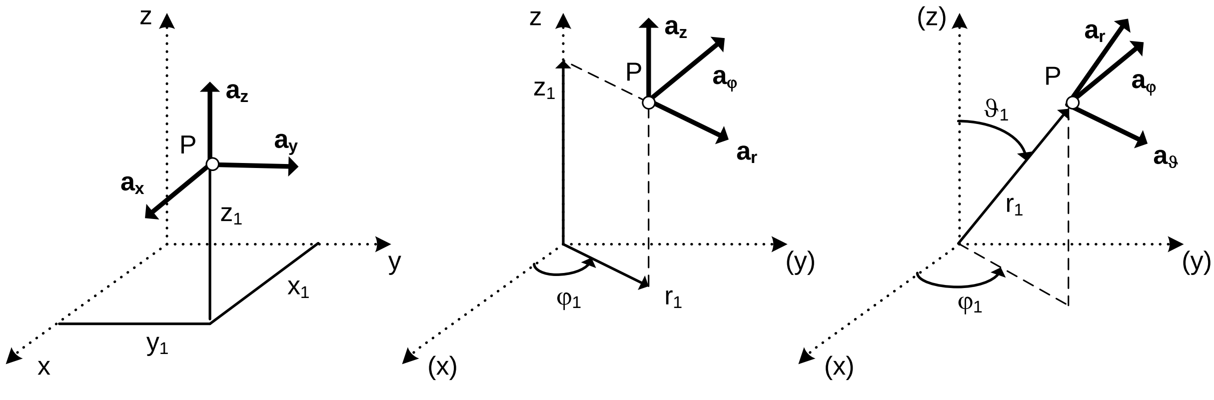
Materialeigenschaften		
$\vec{D} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_o \mu_r \vec{H}$	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$d\vec{s}, d\vec{f}, dV$	Weg-, Flächen- und Volumenelement	
$\vec{E}$	elektrische Feldstärke	V/m
$\vec{D}$	elektrische Flussdichte	C/m^2
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke	A/m
$\vec{B}$	magnetische Flussdicht	T
ρ	Raumladungsdichte	C/m^3
$\vec{j}$	Stromdichte	A/m^2
ε_o	Permittivität des Vakuums (8,854 E-12 As/Vm)	As/Vm
μ_o	Magnetische Feldkonstante (12,566 E-7 H/m)	H/m

Koordinatensysteme

Kartesische K. Zylinder-K. Kugel-K.





Kartesische Koordinaten, Zylinder- und Kugelkoordinaten
mit zugehörigen Einheitsvektoren

Kartesische Koordinaten x, y, z

$$\text{rot}\,\mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X} = \left(\frac{\partial X_z}{\partial y} - \frac{\partial X_y}{\partial z}\right)\mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial X_x}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial x}\right)\mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} - \frac{\partial X_x}{\partial y}\right)\mathbf{a}_z$$

$$\text{div}\,\mathbf{X} = \nabla \cdot \mathbf{X} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

$$\text{grad}\ U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{a}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{a}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla^2 U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{X} = \Delta \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} (\Delta \mathbf{X})_x \\ (\Delta \mathbf{X})_y \\ (\Delta \mathbf{X})_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 X_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 X_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_z}{\partial z^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta X_x \\ \Delta X_y \\ \Delta X_z \end{Bmatrix}$$

Karlsruher Institut für Technologie

IEH Institut für Elektroenergiesysteme und Hochspannungstechnik (IEH)
Leiter: Prof. Dr.-Ing. T. Leibfried

Zylinderkoordinaten r, φ, z

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = z$$

$$\text{rot}\,\mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial X_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial X_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{a}_r + \left(\frac{\partial X_r}{\partial z} - \frac{\partial X_z}{\partial r}\right)\mathbf{a}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r X_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial X_r}{\partial \varphi}\right)\mathbf{a}_z$$

$$\text{div}\,\mathbf{X} = \nabla \cdot \mathbf{X} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r X_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

$$\text{grad}\,U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\mathbf{a}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{a}_z$$

$$\nabla^2 U = \Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{X} = \Delta \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} (\Delta \mathbf{X})_r \\ (\Delta \mathbf{X})_\varphi \\ (\Delta \mathbf{X})_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta X_r - \frac{1}{r^2}X_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi} \\ \Delta X_\varphi - \frac{1}{r^2}X_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial X_r}{\partial \varphi} \\ \Delta X_z \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} \Delta X_r \\ \Delta X_\varphi \\ \Delta X_z \end{Bmatrix}$$

Kugelkoordinaten r, ϑ, φ

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \qquad z = r\cos\vartheta$

$$\operatorname{rot}\mathbf{X} = \nabla\times\mathbf{X} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial(X_\varphi\sin\vartheta)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial X_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial X_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rX_\varphi)}{\partial r}\right)\mathbf{a}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rX_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial X_r}{\partial\vartheta}\right)\mathbf{a}_\varphi$$

$$\operatorname{div}\mathbf{X} = \nabla\cdot\mathbf{X} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2X_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(X_\vartheta\sin\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\operatorname{grad}U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\mathbf{a}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\mathbf{a}_\varphi$$

$$\nabla^2U = \Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}$$

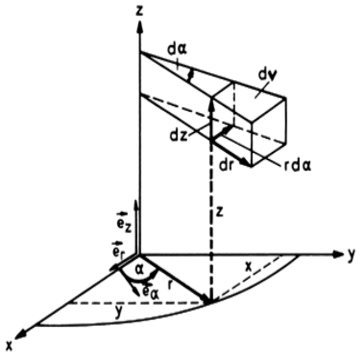
$$\nabla^2\mathbf{X} = \Delta\mathbf{X} = \begin{Bmatrix}(\Delta\mathbf{X})_r\\(\Delta\mathbf{X})_\vartheta\\(\Delta\mathbf{X})_\varphi\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\Delta X_r - \frac{2}{r^2}X_r - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(X_\vartheta\sin\vartheta) - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}\\ \Delta X_\vartheta - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}X_\vartheta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial X_r}{\partial\vartheta} - \frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial X_\varphi}{\partial\varphi}\\ \Delta X_\varphi - \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}X_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial X_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cot\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial X_\vartheta}{\partial\varphi}\end{Bmatrix}$$

Karlsruher Institut für Technologie

IEH Institut für Elektroenergiesysteme und Hochspannungstechnik (IEH)
Leiter: Prof. Dr.-Ing. T. Leibfried

Hochspannungstechnik I
Übung

Kugel und Zylinderkoordinaten



Variablen: r, α, z

Einheitsvektoren: $\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z$

Rechtssystem: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\alpha = \vec{e}_z$

Zusammenhang mit rechtwinkligen Koordinaten:

$x = r\cos\alpha,\quad y = r\sin\alpha,\quad z = z$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\alpha = \arctan(y/x)$

$dr = dx\cos\alpha + dy\sin\alpha$

$r\,d\alpha = dy\cos\alpha - dx\sin\alpha$

$dz = dz$

Linienelement: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\alpha^2 + dz^2}$

Volumenelement: $dv = r\,dr\,d\alpha\,dz$

Nabla Operator: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}\vec{e}_\alpha + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$

Gradient: $\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\vec{e}_\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{e}_z$

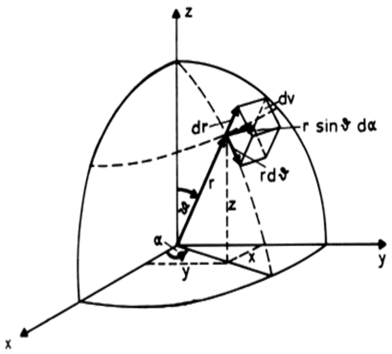
Divergenz: $\operatorname{div}\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$

Rotation: $\operatorname{rot}\vec{u} = \vec{e}_r\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial z}\right\} + \vec{e}_\alpha\left\{\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right\} + \vec{e}_z\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \alpha}\right\}$

Laplace Operator: $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial ..}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 ..}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 ..}{\partial z^2}$

$\Delta\vec{u} = \vec{e}_r\left\{\Delta u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{u_r}{r^2}\right\} + \vec{e}_\alpha\left\{\Delta u_\alpha + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{r^2}\right\} + \vec{e}_z\left\{\Delta u_z\right\}$

Flächen-element: $dA_r = r\,d\varphi\,dz$



Variablen: r, ϑ, α

Einheitsvektoren: $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\alpha$

Rechtssystem: $\vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\alpha$

Zusammenhang mit rechtwinkligen Koordinaten:

$x = r\sin\vartheta\cos\alpha,\quad y = r\sin\vartheta\sin\alpha$

$z = r\cos\vartheta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\alpha = \arctan(y/x)$

$\vartheta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z)$

$dr = dx\sin\vartheta\cos\alpha + dy\sin\vartheta\sin\alpha + dz\cos\vartheta$

$r\sin\vartheta\,d\alpha = dy\cos\alpha - dx\sin\alpha$

$r\,d\vartheta = dx\cos\vartheta\cos\alpha + dy\cos\vartheta\sin\alpha - dz\sin\vartheta$

Linienelement: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2\sin^2\vartheta\,d\alpha^2 + r^2\,d\vartheta^2}$

Volumenelement: $dv = r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\alpha$

Nabla Operator: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\vec{e}_\alpha$

Gradient: $\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\vec{e}_\alpha$

Divergenz: $\operatorname{div}\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta\cdot u_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha}$

Rotation: $\operatorname{rot}\vec{u} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta\cdot u_\alpha) - \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \alpha}\right\}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial u_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r}(r u_\alpha)\right\}\vec{e}_\vartheta$
$+ \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r u_\vartheta) - \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta}\right\}\vec{e}_\alpha$

Laplace-Operator: $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial ...}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial ...}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 ...}{\partial \alpha^2}$

Flächen-element: $dA_r = r^2\sin(\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta$

Oberflächenelemente:

- Kartesische Koordinaten

$$dA_{kartesisch} = \overrightarrow{e_x} \cdot dy \cdot dz + \overrightarrow{e_y} \cdot dx \cdot dz + \overrightarrow{e_z} \cdot dx \cdot dy$$

- Kugelkoordinaten

$$dA_{Kugel} = \overrightarrow{e_r} \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot d\varphi \cdot d\vartheta + \overrightarrow{e_\varphi} \cdot r \cdot dr \cdot d\upsilon + \overrightarrow{e_\vartheta} \cdot r \cdot \sin(\vartheta) \cdot dr \cdot d\varphi$$

- Zylinderkoordinaten

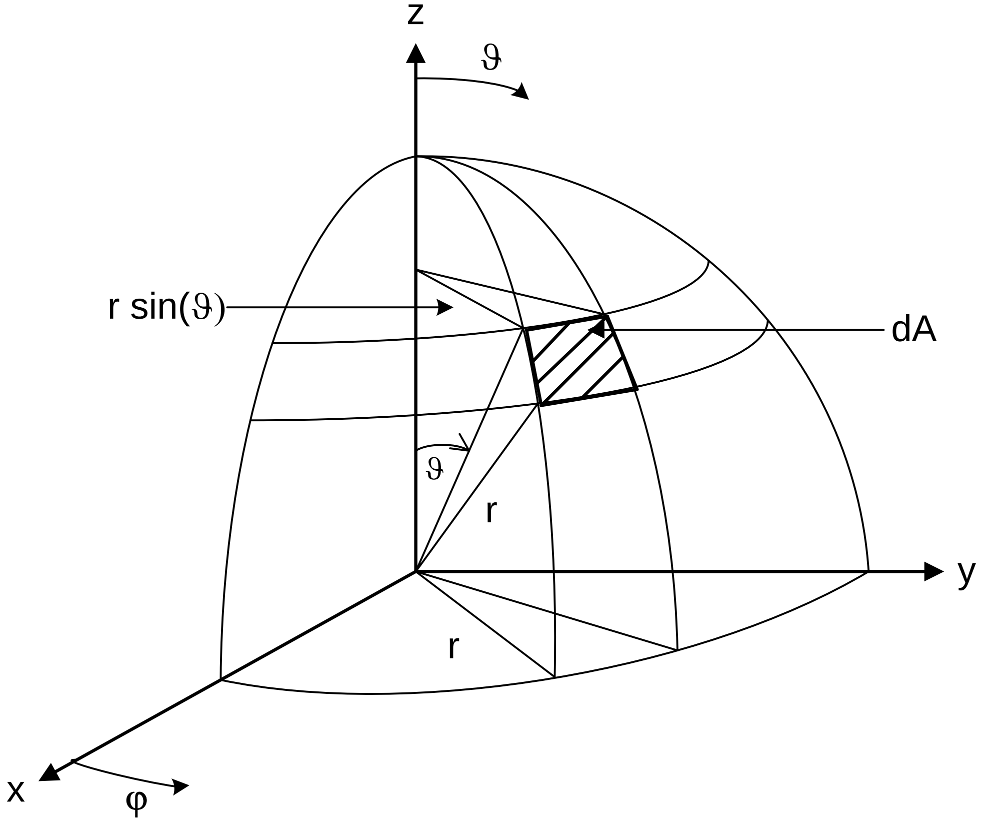
$$dA_{Zylinder} = \overrightarrow{e_r} \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz + \overrightarrow{e_\varphi} \cdot r \cdot dr \cdot dz + \overrightarrow{e_z} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$$

Karlsruher Institut für Technologie

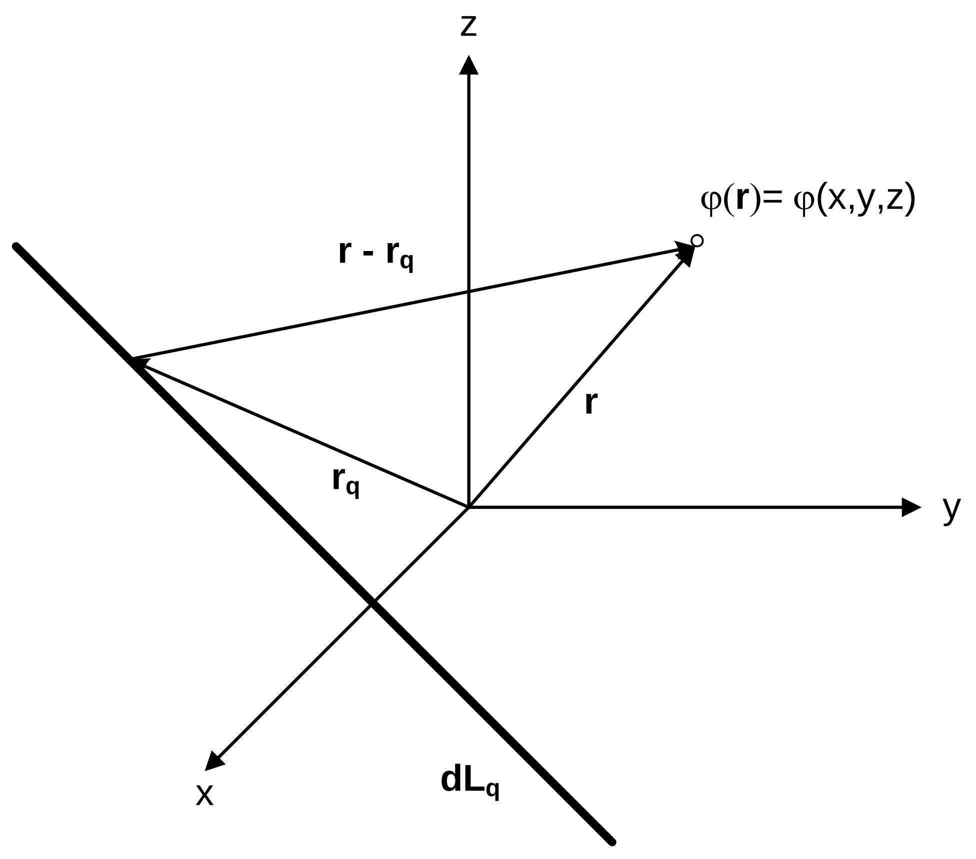
IEH
Institut für Elektroenergiesysteme und Hochspannungstechnik (IEH)
Leiter: Prof. Dr.-Ing. T. Leibfried

Hochspannungstechnik I
Übung

Integration über sphärisch gekrümmte Oberfläche



Potentialfunktion $\varphi(r)$ einer Linienladungsdichte $\rho_L(r_q)$



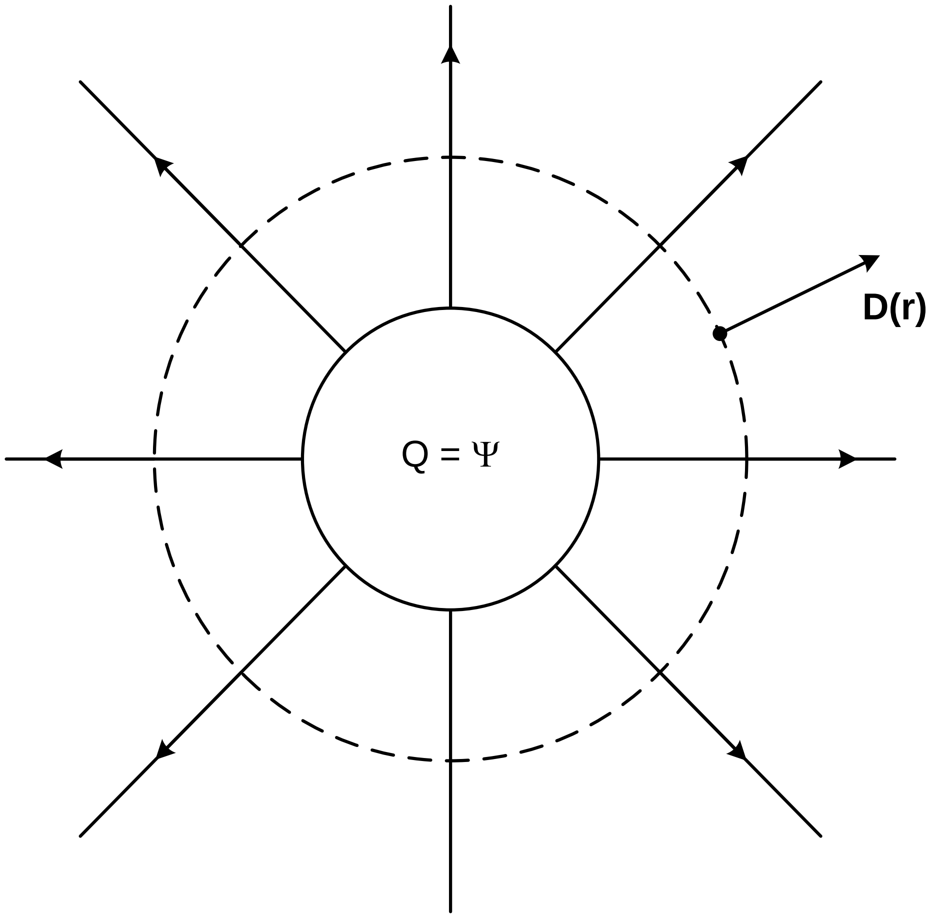
Zur Berechnung der Potentialfunktion $\varphi(\mathbf{r})$ einer Linienladungs-dichte $\rho_L(\mathbf{r}_q)$ mit Quellen-Ortsvektor $\mathbf{r}_q$.

Karlsruher Institut für Technologie

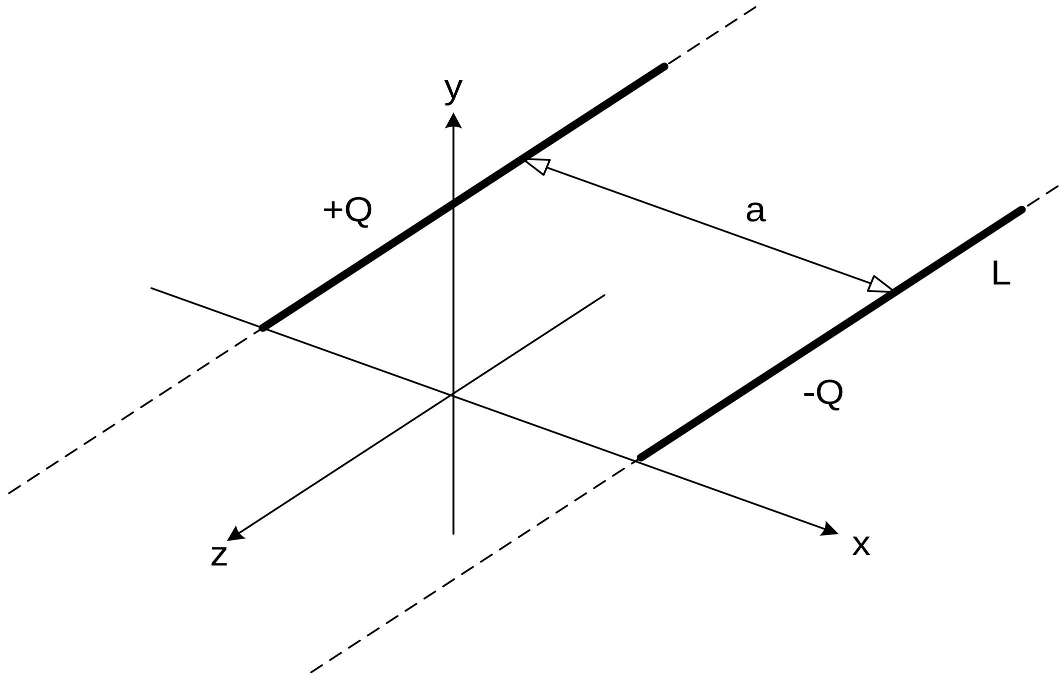
Institut für Elektroenergiesysteme
und Hochspannungstechnik (IEH)
Leiter: Prof. Dr.-Ing. T. Leibfried

Hochspannungstechnik I
Übung

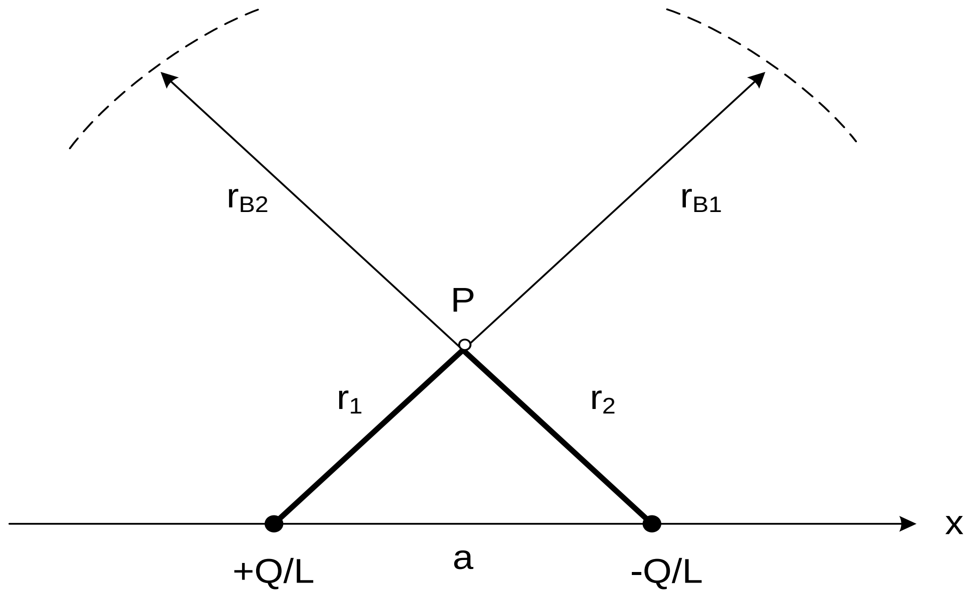
Ebenes Zylinder- bzw. Kuglesymmetrisches-Problem



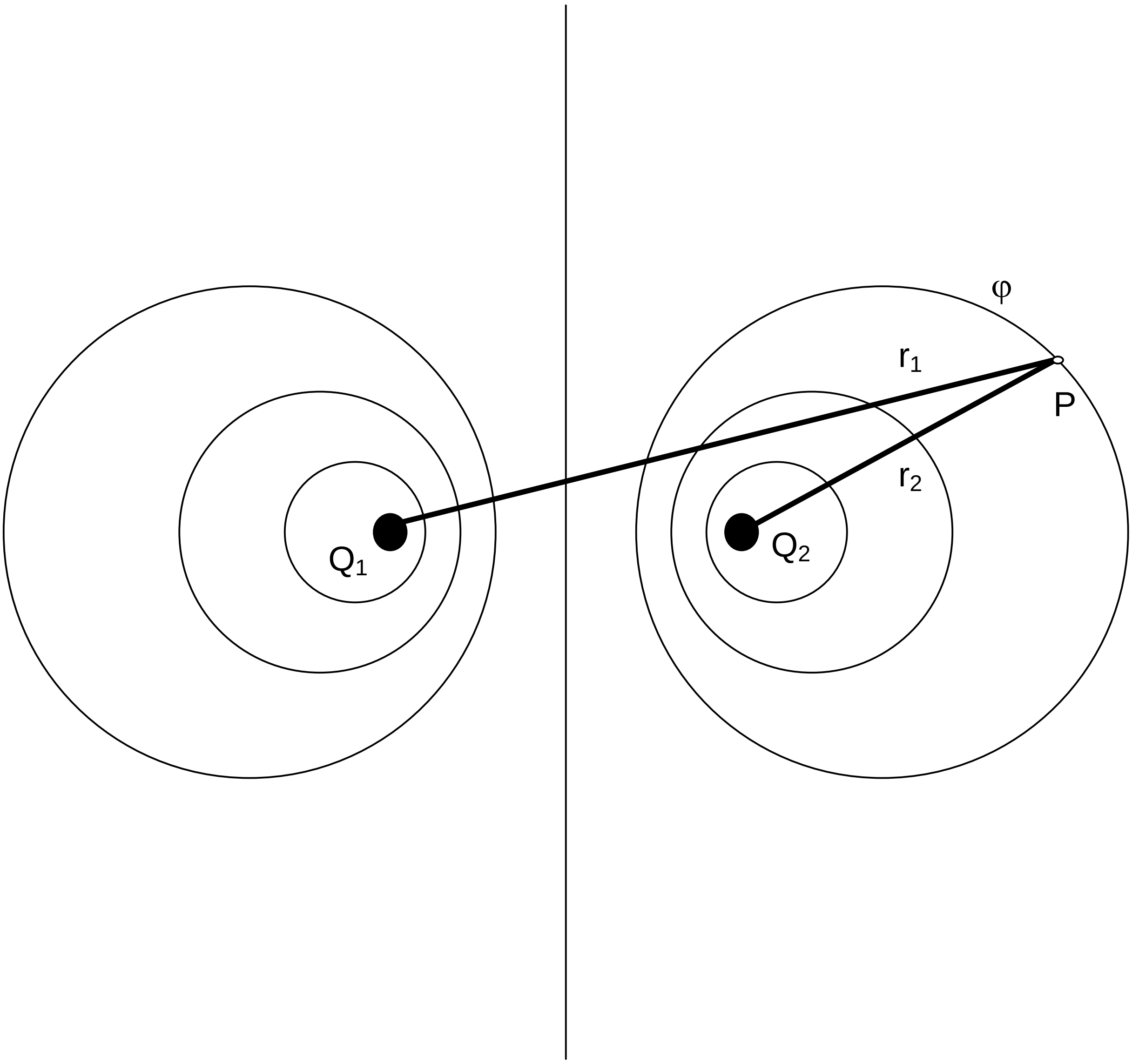
Zwei parallele Ladungen



sehr weit entferntes Bezugspotential



Überlagerung von Quellenfeldern



Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Elektroenergiesysteme
und Hochspannungstechnik (IEH)
Leiter: Prof. Dr.-Ing. T. Leibfried

Hochspannungstechnik I
Übung

Gaußsches Gesetz / Satz vom Hüllenfluß